Année 1973

PROBLÈME DES MOMENTS

ÉNONCÉ

Il est rappelé aux candidats :

— qu'il sera tenu le plus grand compte, dans l'appréciation des copies, du soin apporté à la présentation, de la clarté et de la précision des démonstrations ;

— qu'ils doivent respecter les notations fixées par l'énoncé.

On note **C** le plan complexe, $z = x + iy$ un point quelconque de **C** ($x = \text{Re}\, z$ et $y = \text{Im}\, z$ sont réels), r le module de z et $\bar{z}$ le conjugué $x - iy$ de z.

Soit D le demi-plan $y > 0$ de **C**. Pour tout élément z de D, on pose $z = re^{i\theta}$ avec $0 < \theta < \pi$. Si F est une application de D dans **C**, on note, lorsqu'elles existent, $\dfrac{\partial F}{\partial x}$, $\dfrac{\partial F}{\partial y}$, $\dfrac{\partial^2 F}{\partial x^2} \cdots$ les dérivées partielles de l'application $(x, y) \longmapsto F(x + iy)$ et $\dfrac{\partial F}{\partial r}$, $\dfrac{\partial F}{\partial \theta}$, $\dfrac{\partial^2 F}{\partial \theta^2} \cdots$ les dérivées partielles de l'application $(r, \theta) \longmapsto F(re^{i\theta})$.

Toutes les fonctions considérées dans ce texte sont supposées continues, sauf peut-être en un nombre fini de points. Si f est une application de **R** dans **C**, on appellera $\mathfrak{P}$ la condition :

$$\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{|f(t)|}{1+t^2}\, dt < +\infty .$$

Conformément à l'usage, **C**[X] désigne l'ensemble des polynômes à une indéterminée et à coefficients dans **C**. Un élément quelconque P de **C**[X] est noté $\Sigma\, p_j\, X^j$. Toutes les suites considérées dans le problème sont indexées dans **N** (ensemble des entiers naturels zéro compris).

I

Soit k l'application de $\mathrm{D} \times \mathbf{R}$ dans $\mathbf{R}$ définie par

$$k(z, t) = \frac{y}{(x-t)^2 + y^2} = \frac{1}{2i}\left(\frac{1}{t-z} - \frac{1}{t-\bar{z}}\right)$$

Si f est une application de $\mathbf{R}$ dans $\mathbf{C}$, on note $\mathrm{K}f$ l'application de D dans $\mathbf{C}$ définie par $\mathrm{K}f\,(z) = \frac{1}{\pi}\int_{-\infty}^{+\infty} k(z,t) f(t)\,dt$, lorsque cette intégrale est convergente pour tout z appartenant à D.

a. Si f satisfait à $\mathfrak{T}$, démontrer que $\mathrm{K}f$ existe, que $\mathrm{K}f$ est indéfiniment continûment dérivable par rapport aux variables x et y et qu'on a :

$$\left(\frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2}\right)\mathrm{K}f = 0\ .$$

b. L'application f vérifiant toujours $\mathfrak{T}$, on la suppose continue au point t_0 de $\mathbf{R}$; démontrer qu'on a :

$$\lim_{\substack{z \to t_0 \\ y > 0}} \mathrm{K}f\,(z) = f(t_0)\ .$$

II

a. Soit F une fonction définie dans le demi-plan $y \geqslant 0$ de $\mathbf{C}$ et à valeurs dans $\mathbf{C}$. On suppose que F est continue, que sa restriction à D est holomorphe et que F vérifie $\lim\limits_{\substack{z \to \infty \\ y \geqslant 0}} \frac{\mathrm{F}(z)}{z} = 0$.

Démontrer que, pour tout z de D, on a

$$\mathrm{F}(z) = \lim_{\mathrm{A} \to +\infty} \frac{1}{\pi}\int_{-\mathrm{A}}^{\mathrm{A}} k(z,t)\,\mathrm{F}(t)\,dt\ .$$

b. Expliciter $\mathrm{K}f$ pour $f(t) = \mathrm{Log}\,|t - \alpha|$, où α est un complexe arbitraire (on pourra d'abord supposer $\mathrm{Im}\ \alpha < 0$ et utiliser II *a.* en choisissant F de sorte qu'on ait $\mathrm{Re}\ \mathrm{F}(t) = \mathrm{Log}\,|t - \alpha|$ pour $t \in \mathbf{R}$).

Démontrer que, pour tout polynôme P à coefficients complexes et pour tout z non réel, on a :

$$(1) \qquad \mathrm{Log}\,|\mathrm{P}(z)| \leqslant \frac{1}{\pi}\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{|y|\,\mathrm{Log}\,|\mathrm{P}(t)|}{(x-t)^2 + y^2}\,dt\ .$$

c. Pour quelles valeurs du réel σ l'intégrale $\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{|t|^\sigma}{1+t^2}\,dt$ est-elle convergente? Pour ces valeurs de σ expliciter $\mathrm{K}f$ lorsque f est la fonction $t \longmapsto |t|^\sigma$.

Vérifier en particulier qu'on a, pour tout r strictement positif, :

$$(2) \qquad \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{r\,|t|^\sigma}{r^2 + t^2}\,dt = c(\sigma)\,r^\sigma$$

et donner la valeur de $c(\sigma)$. (On pourra dans le cas $0 < \sigma < 1$ appliquer II *a.* à la fonction $z \longmapsto \left(\frac{z}{i}\right)^\sigma = r^\sigma e^{i\sigma\left(\theta - \frac{\pi}{2}\right)}$) .

III

a. On considère l'opérateur différentiel $\delta = x\frac{\partial}{\partial x} + y\frac{\partial}{\partial y} = r\frac{\partial}{\partial r}$; $\delta \circ \delta$ est noté δ^2. Soit f une application de $\mathbf{R}$ dans $\mathbf{C}$ vérifiant $\mathfrak{T}$. Pour tout réel λ strictement positif, on note f_λ l'application de $\mathbf{R}$ dans $\mathbf{C}$ définie par $f_\lambda(t) = f(\lambda t)$.

Démontrer qu'au sens de la convergence simple on a :

$$\delta^2\,\mathrm{K}f = \lim_{\substack{\lambda \to 1 \\ \lambda \neq 1}} \left[\frac{1}{(\lambda-1)^2}\,\mathrm{K}\left(f_\lambda + f_{\frac{1}{\lambda}} - 2f\right)\right]$$

b. Exprimer l'opérateur différentiel $\Delta = \frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2}$ en fonction de δ et $\frac{\partial}{\partial \theta}$.

Soit f une application de $\mathbf{R}$ dans $\mathbf{R}$ vérifiant $\mathfrak{T}$. On suppose que les deux fonctions $t \longmapsto f(e^t)$ et $t \longmapsto f(-e^t)$ sont convexes; démontrer qu'on a : $\frac{\partial^2 \mathrm{K}f}{\partial \theta^2} \leqslant 0$.

c. On suppose que f est une fonction paire vérifiant les hypothèses de III *b.* Démontrer que, pour tout r fixé strictement positif, la fonction $\theta \longmapsto \mathrm{K}f\,(re^{i\theta})$ admet un maximum atteint pour $\theta = \frac{\pi}{2}$.

IV

Dans cette question,

- W désigne une application paire de $\mathbf{R}$ dans $[1, +\infty[$, vérifiant

$$\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{\operatorname{Log} W(t)}{1+t^2}\, dt < +\infty$$

et telle que la fonction $t \longmapsto \operatorname{Log} W(e^t)$ soit convexe; on pose pour tout r strictement positif $\mu(r) = \dfrac{1}{2\pi} \displaystyle\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{r \operatorname{Log} W(t)}{r^2+t^2}\, dt$ et, pour tout élément j de $\mathbf{N}$, $M_j = \sup\limits_{r>0} \dfrac{r^{j+\frac{1}{2}}}{e^{\mu(r)}}$.

- $P = \Sigma p_j X^j$ est un élément de $\mathbf{C}[X]$ satisfaisant à

$$\int_{-\infty}^{+\infty} |P(t)|^2 (W(t))^{-1}\, dt \leqslant 1 .$$

a. Prouver que, pour tout réel u et tout réel strictement positif v, on a :

$$uv \leqslant e^{u-1} + v \operatorname{Log} v$$

b. Démontrer l'existence d'un réel C indépendant de P et W tel que pour tout z non réel on ait

$$|P(z)| \leqslant C\, |y|^{-\frac{1}{2}} e^{\mu(r)}$$

On utilisera l'égalité

$$K\operatorname{Log}|P|\ (z) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} k(z,t) \operatorname{Log} \left| (P(t))^2 (W(t))^{-1} \right| dt + \frac{1}{2} K\operatorname{Log}W\ (z)$$

et on appliquera les résultats des questions II et III ainsi que l'inégalité IV*a*., où il est suggéré de remplacer u par $\operatorname{Log} \left| (P(t))^2 (W(t))^{-1} \right|$.

c. Déduire de IV*b*. l'existence d'un réel H, indépendant de P et W, tel que, pour tout j, on ait : $|p_j| \leqslant \dfrac{H}{M_j}$.

V

On désigne toujours par W une application satisfaisant aux hypothèses de IV. On suppose en outre que, pour tout élément j de $\mathbf{N}$, on a :

$$\lim_{t \to +\infty} \frac{t^j}{W(t)} = 0 .$$

Les notations de IV sont conservées.

a. Démontrer qu'il existe une suite (P_n) de polynômes $P_n = \Sigma p_{nj} X^j$ satisfaisant aux conditions :

(i) P_n est de degré n

(ii) $$\int_{-\infty}^{+\infty} P_m(t) P_n(t) (W(t))^{-1}\, dt = \delta_{mn} = \begin{cases} 0 & \text{si } m \neq n \\ 1 & \text{si } m = n \end{cases}$$

b. Déduire de IV que, pour tout élément j de $\mathbf{N}$, on a :

$$\sum_{n=0}^{+\infty} |p_{nj}|^2 \leqslant \left(\frac{H}{M_j}\right)^2$$

c. Soit (b_n) une suite complexe satisfaisant à : $\displaystyle\sum_0^{+\infty} |b_n|^2 < +\infty$.

Démontrer que la série $\displaystyle\sum_0^{+\infty} b_n P_n(z)$ est convergente dans $\mathbf{C}$ et que sa somme est une fonction entière de z (c'est-à-dire holomorphe dans le plan complexe $\mathbf{C}$ tout entier).

d. Soit (a_j) une suite complexe satisfaisant à : $\displaystyle\sum_0^{+\infty} \left| \frac{a_j}{M_j} \right| < +\infty$.

Démontrer l'existence d'une suite unique (b_n) de complexes telle qu'on ait $\displaystyle\sum_0^{+\infty} |b_n|^2 < +\infty$ et que la fonction $f = \displaystyle\sum_0^{+\infty} b_n P_n$ vérifie pour tout j $\displaystyle\int_{-\infty}^{+\infty} t^j f(t) (W(t))^{-1}\, dt = a_j$.

VI

Dans cette question on note

- ρ un réel strictement positif et $\sigma = \dfrac{1}{\rho}$ son inverse;

• s^ρ l'ensemble des suites complexes (a_n) telles qu'il existe un réel c strictement positif (dépendant de la suite) pour lequel on a :

$$\sup_{n \geqslant 0} \left[c^{-n} n^{-\rho n} \mid a_n \mid \right] < +\infty$$

• S^ρ l'ensemble des applications f indéfiniment dérivables de $\mathbf{R}$ dans $\mathbf{C}$ telles qu'il existe un réel c strictement positif (dépendant de f) pour lequel on a :

$$\sup_{\substack{n \geqslant 0 \\ x \in \mathbf{R}}} \left[c^{-n} n^{-\rho n} \mid f^{(n)}(x) \mid \right] < +\infty$$

• W_A l'application de $\mathbf{R}$ dans $\mathbf{R}$: $t \longmapsto W_A(t) = \exp\left(\frac{|t|}{A}\right)^\sigma$, associée à un réel A strictement positif quelconque $\left(\sigma = \frac{1}{\rho}\right)$.

a. Soit g une application de $\mathbf{R}$ dans $\mathbf{C}$ satisfaisant à

$$\int_{-\infty}^{+\infty} |g(t)|^2 (W_A(t))^{-1} dt < +\infty$$

Le nombre x étant réel, on pose :

$$f(x) = \int_{-\infty}^{+\infty} e^{itx} g(t) \left(W_A(t) \right)^{-1} dt \quad .$$

Démontrer qu'on définit ainsi une application f de $\mathbf{R}$ dans $\mathbf{C}$, qui est élément de S^ρ et qui, pour tout entier positif ou nul, satisfait à :

$$f^{(n)}(0) = i^n \int_{-\infty}^{+\infty} t^n g(t) (W_A(t))^{-1} dt$$

$\left(\right.$on rappelle que $\Gamma(u) = \int_0^{+\infty} e^{-t} t^{u-1} dt$ et $\left(\frac{u}{e}\right)^u \sqrt{\frac{2\pi}{u}}$ sont équivalents lorsque u tend vers $+\infty$$\left.\right)$.

b. On suppose désormais $\rho > 1$. L'application W_A vérifie alors les hypothèses de IV et V.

Calculer

$$\mu_A(r) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{r \operatorname{Log} W_A(t)}{r^2 + t^2} dt \qquad \text{(utiliser II}c.\text{)}$$

Démontrer

$$M_j(A) = \sup_{r>0} \left[r^{j+\frac{1}{2}} \exp(-\mu_A(r)) \right] = \left[\gamma A \left(j + \frac{1}{2} \right)^\rho \right]^{j+\frac{1}{2}}$$

où γ est un nombre qu'on calculera.

c. Déduire de V*d.* que, pour tout élément (a_n) de s^ρ, il existe un élément f de S^ρ tel que, pour tout n, on ait : $f^{(n)}(0) = a_n$.

$\left(\right.$On cherchera f de la forme : $x \longmapsto \int_{-\infty}^{+\infty} e^{itx} g(t) \left(W_A(t) \right)^{-1} dt$, en choisissant A et g convenablement$\left.\right)$.